ビオ・サバールの法則と電流がつくる磁界

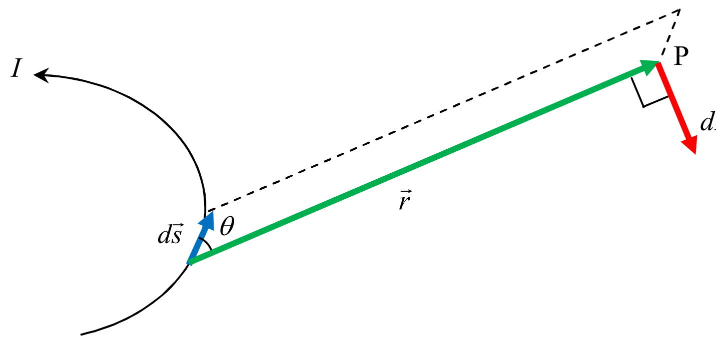
ビオ・サバールの法則

電流 I が流れている導線の微小部分 $d\vec{s}$ から $\vec{r}$ の位置にある点 P の磁界の強さ $d\vec{H}$ は，

$d\vec{H} = \dfrac{Id\vec{s}}{4\pi r^2} \times \dfrac{\vec{r}}{r}$ で与えられる。

さらに，外積 $d\vec{s} \times \vec{r} = ds \cdot r\sin\theta$ より， $dH = \dfrac{Ids\sin\theta}{4\pi r^2}$ と変形できる。

参考：外積の活用 http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukonetapdf/exterior%20product.pdf



簡単な導き方

点電荷 q からの距離 r の球面の面積は $4\pi r^2$ だから電荷密度= $\dfrac{q}{4\pi r^2}$

したがって，点 P における磁界は正味 $\dfrac{q}{4\pi r^2}$ の電荷の運動によるものであり，

点電荷 q の速度を $\vec{v}$ とすると，点 P における磁界の微小変化微小変化 $d\vec{H}$ は，

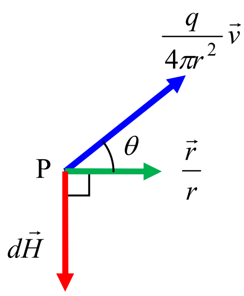
$\dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{v}$ と $\vec{r}$ の単位ベクトル $\dfrac{\vec{r}}{r}$ の外積，すなわち $d\vec{H} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{v} \times \dfrac{\vec{r}}{r}$ で与えられる。

ここで，変位を $d\vec{s}$ とすると， $\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$ より， $q\vec{v} = q \cdot \dfrac{d\vec{s}}{dt} = \dfrac{q}{dt} \cdot d\vec{s}$ と変形できる。

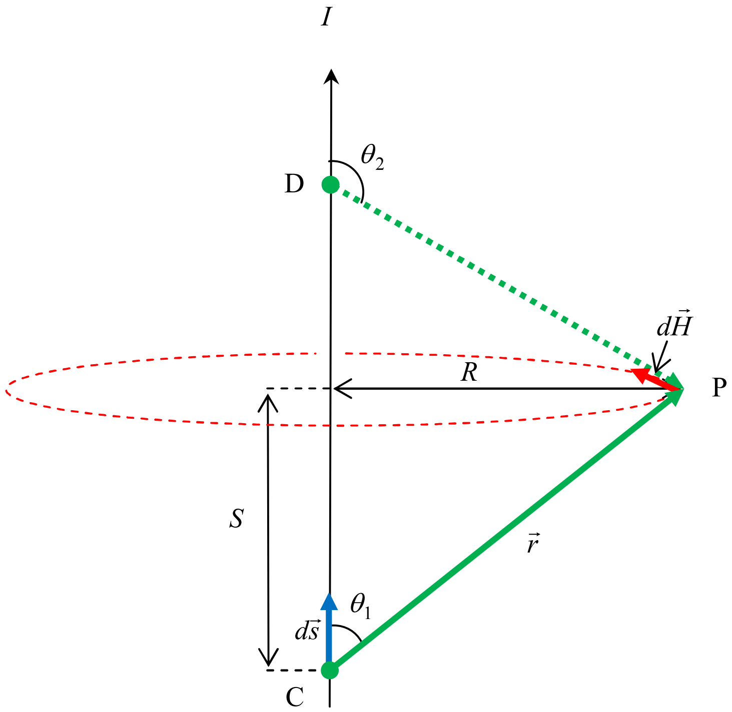
さらに， $\dfrac{q}{dt}$ を単位時間に流れる電気量，すなわち電流とみなし，これを I とおくと，

$d\vec{H} = \dfrac{q}{4\pi r^2}\vec{v} \times \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{Id\vec{s}}{4\pi r^2} \times \dfrac{\vec{r}}{r}$ $\qquad \therefore dH = \dfrac{Ids \cdot r\sin\theta}{4\pi r^3}$

ゆえに， $dH = \dfrac{Ids\sin\theta}{4\pi r^2}$



直線電流がつくる磁界の強さ



導線から距離 R 離れた点 P に CD 間を流れる直線電流がつくる磁界の強さ

$dH=\dfrac{Ids\sin\theta}{4\pi r^2}$ において，$S=\dfrac{R}{\tan\theta}$ より，$ds=-\dfrac{R}{\sin^2\theta}d\theta$

これと $r=\dfrac{R}{\sin\theta}$ より，

$$dH=\frac{Ids\sin\theta}{4\pi r^2}=\frac{I\cdot\left(-\dfrac{R}{\sin^2\theta}d\theta\right)\sin\theta}{4\pi\dfrac{R^2}{\sin^2\theta}}=-\frac{I\sin\theta}{4\pi R}d\theta$$

$$\therefore H=\left|\int_{\theta_1}^{\theta_2}dH\right|=\left|-\frac{I}{4\pi R}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta d\theta\right|=\left|-\frac{I}{4\pi R}\left[-\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}\right|=\frac{I}{4\pi R}\left|\cos\theta_1-\cos\theta_2\right|$$

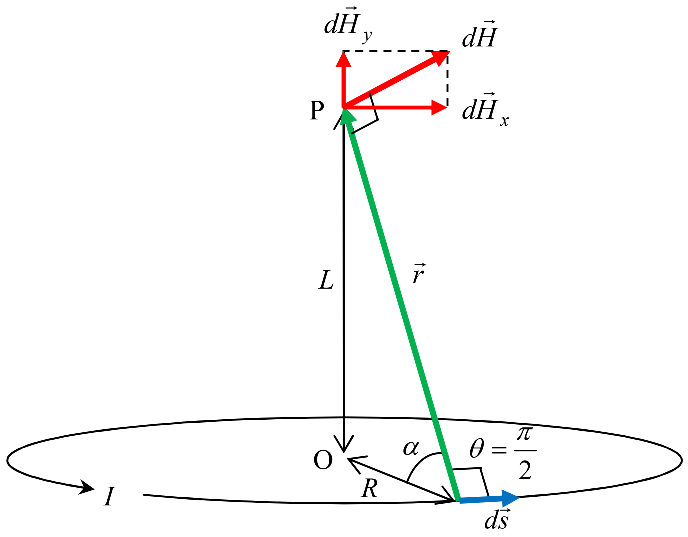
よって，

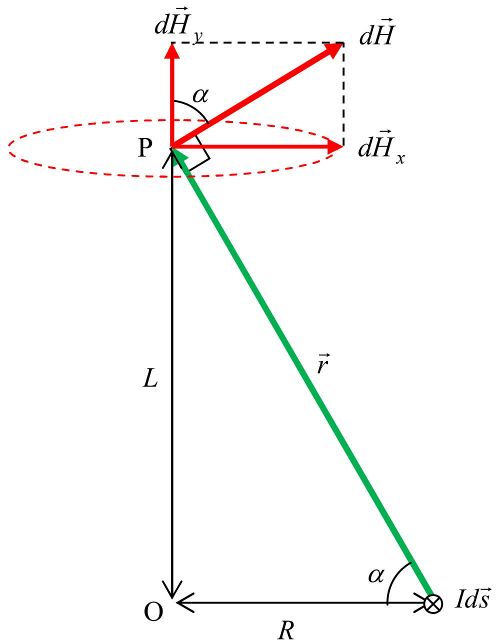
直線電流がつくる磁界の強さ $H=\dfrac{I}{4\pi R}\left|\cos\theta_1-\cos\theta_2\right|$

とくに，無限長の直線電流がつくる磁界の強さは，

$\theta_1\to 0$，$\theta_2\to\pi$ より，$H=\dfrac{1}{2\pi R}$

円形電流がつくる磁界の強さ





円形電流の中心軸上に点 P をとると，
$d\vec{H}_x$ の終点の軌跡は P を中心とする円を描くから，そのベクトル和は $\vec{0}$ である。

よって，$d\vec{H}_y$ のみについて考えればよい。

$dH_y = dH\cos\alpha = \dfrac{Ids\sin\theta}{4\pi r^2}\cos\alpha$ について，

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$r = \dfrac{R}{\cos\alpha}$ より，

$$H_y = \int dH_y = \int \frac{Ids}{4\pi\cdot\dfrac{R^2}{\cos^2\alpha}}\cos\alpha = \frac{I\cos^3\alpha}{4\pi R^2}\int ds = \frac{I\cos^3\alpha}{4\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{I}{2R}\cos^3\alpha$$

よって，円形電流の中心軸における磁界の強さ $H = \dfrac{I}{2R}\cos^3\alpha$

とくに，円形電流の中心 O の磁界の強さは，$\alpha = 0$ より，$H = \dfrac{I}{2R}$

ソレノイド電流がつくる磁界の強さ

導線を円筒面上に規則的に巻いたものをソレノイドという。

単位長あたりの巻き数n，半径Rのソレノイドを考える。

ソレノイドは多数の円形電流の集まりと見なすことができるから，

長さdxのソレノイドがつくる磁界の強さは，$dH=\dfrac{I}{2R}\cos^3\alpha\cdot ndx$である。

ここで，ソレノイドの中心軸上に点Pをとると，

$\dfrac{x}{R}=\tan\alpha$ より，

$$dx=\frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

よって，

$$dH=\frac{I}{2R}\cos^3\alpha\cdot ndx=\frac{nI}{2R}\cos^3\alpha\cdot\frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha=\frac{nI}{2}\cos\alpha d\alpha$$

したがって，

$\alpha_1\le\alpha\le\alpha_2$のとき，点Pにおける磁界の強さ$H$は，

$$H=\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}dH\right|=\frac{nI}{2}\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha\right|=\frac{nI}{2}\left|\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\right|$$

よって，

ソレノイドの中心軸における磁界の強さ$H=\dfrac{nI}{2}\left|\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\right|$

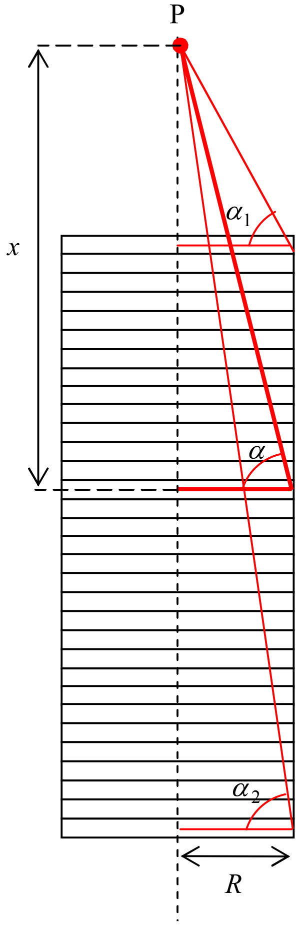
とくに　十分細長いソレノイドの場合

ソレノイドの中心の磁界の強さ

$\alpha_1\to-\dfrac{\pi}{2},\alpha_2\to\dfrac{\pi}{2}$ より，$H=nI$

ソレノイドの一端の磁界の強さ

$\alpha_1=0,\alpha_2\to\dfrac{\pi}{2}$ より，$H=\dfrac{nI}{2}$


P
x
α_1
α
α_2
R